BÖLÜNMÜŞ FARKLAR (DİVİDED DİFFERENCES)

Lagrange ve Neville yöntemlerinin bazı olumsuz yanları vardır:

- *İşlem sayısı çok fazladır* (bazı başka yöntemlere kıyasla)
- *Data setinde bir nokta ilavesi veya çıkartılması halinde bütün hesapların baştan yenilenmesi gerekmektedir*.
- *Her bir interpolasyon noktası için benzeri hesapların tekrarlanması gerekmektedir*.

Bölünmüş fark tabloları bu olumsuzlukları gidermekte yararlı olmaktadır.

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$$

şeklinde bir data seti verilmiş olsun. *n* 'inci dereceden bir polinomun özel olarak

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

şeklinde düzenlenmiş olduğunu varsayalım. Buradaki $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları uygun seçildiği taktirde yukarıdaki bütün data noktaları bu fonksiyonu sağlayabilir. İşte bu katsayılar bölünmüş fark tabloları yardımıyla elde edilecektir.

Bölünmüş Fark Tabloları:

$f[x_i] = f_i \quad , \; i = 0,1,2,\dots,n$ 0. dereceden bölünmüş fark

$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad , f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \quad , \dots , f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$ 1. Dereceden bölünmüş fark

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad , \dots , f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_0}$

2. Dereceden bölünmüş fark

Genel olarak

$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ *n*. dereceden bölünmüş fark

olarak tanımlanır.

Katsayıların Belirlenmesi:

Yukarıda özel olarak

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

şeklinde düzenlenen *n* 'inci dereceden polinomda *x* yerine sırasıyla veri noktalarının x_i koordinatları konulduğunda $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0,1,\ldots,n$ eşitliklerinin sağlanması gerekmektedir. Buna göre,

$x = x_0 \quad \rightarrow \quad P_n(x_0) = a_0 = f_0$

$x = x_1 \quad \rightarrow \quad P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$

$x = x_2 \quad \rightarrow \quad P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$

$\vdots$

$x = x_n \quad \rightarrow \quad P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n$

olup, buradaki ilk denklemden

$$a_0 = f_0 = f[x_0]$$

ve bu değer kullanılarak ikinci denklemden

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

bulunur. Bu değerler kullanılarak üçüncü denklemden

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

bulunur. Diğer katsayılar için de benzer işlemler yapılarak

$$a_k = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

olduğunu göstermek mümkündür. Yani katsayılar bölünmüş fark değerlerine eşittir. Bu durumda $P_n(x)$ polinomu Newton bölünmüş farklar polinomu olarak

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

veya

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

biçiminde yazılır.

Bölünmüş farklar polinomu için bölünmüş farklar tablosunu aşağıdaki biçimde oluşturacağız:(*n*=4 için)

i	x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	x_0	f_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
1	x_1	f_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
2	x_2	f_2	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		
3	x_3	f_3	$f[x_3, x_4]$			
4	x_4	f_4				

sayısal değerler kullanılırsa aşağıdaki gibi bir tablo elde edilir:

i	x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	3.2	22.0	8.400	2.856	-0.528	0.256
1	2.7	17.8	2.118	2.012	0.0865	
2	1.0	14.2	6.342	2.263		
3	4.8	38.3	16.75			
4	5.6	51.7				

Bu tablo kullanılarak $P_3(x)$ bölünmüş farklar polinomu:

$$P_3(x) = 22.0 + 8.4(x - 3.2) + 2.856(x - 3.2)(x - 2.7) - 0.528(x - 3.2)(x - 2.7)(x - 1.0)$$

şeklinde yazılır ve buradan $x = 3.0$ noktası için bu polinom yardımıyla enterpolasyon yapılırsa,

$$P_3(3.0) = 20.212$$

değeri elde edilir.

Not: Aynı verilerle aynı nokta için interpolasyon Lagrange yöntemiyle veya Neville yöntemiyle yapılmış olsaydı yine aynı sonuç elde edilirdi. Bu durum şaşırtıcı değildir. Zira kullanılan polinomlar aslında aynı olmakla birlikte yöntemler arasında sadece uygulama farklılığı söz konusudur.

Örnek : Aşağıdaki tabloda verilen data için $f(3.0)$ değerini 3. ve 4. dereceden polinomlarla hesaplayınız.

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	-1.5	2.1	2.4	3.4
$f_i = f(x_i)$	-3.0	-47.375	8.605	19.12	92.52

Tablodaki değerlerin bölünmüş farklar tablosu:

i	x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+4}]$
0	1.0	**-3.0**	**17.75**	**-2.0**	**5.00**	**0.00**
1	-1.5	-47.375	15.55	5.00	5.00	
2	2.1	8.605	35.05	29.50		
3	2.4	19.12	73.4			
4	3.4	92.52				

ve

$$P_3(x) = -\mathbf{3.0} + \mathbf{17.75}(x-1.0) - \mathbf{2.0}(x-1.0)(x+1.5) + \mathbf{5.0}(x-1.0)(x+1.5)(x-2.1)$$

buradan da $P_3(3.0) = 55.0$ bulunur. Dikkat edilecek olursa burada sadece 4 nokta kullandık eğer 5 nokta kullanmak istenseydi bu sonucu değiştirmeyecekti. Bunun nedeni 4. dereceden bölünmüş farkın 0 olmasıdır. Burada kullanılan veri gruplar $5x^3-10x^2+4x-2$ fonksiyonundan türetilmiştir. Yani üç fark yani 3. dereceden bir polinom çözüm için yeterlidir.

EŞİT ARALIKLI VERİLER :

Yukarıdaki Bölünmüş farklar tabloları oluşturulurken verilen noktalar arasında eşit mesafeler olması gerekmemektedir. Eğer bağımsız değişkenler arasında eşit mesafeler var ise bu durumda *bölünmüş farklar* yerine (*sonlu) farklar tabloları* oluşturulabilir. Fark tabloları bölünmüş farklar tablolarından daha kolay elde edilirler. Bunlar sadece verilen bağımsız değişken arasındaki farklardan yararlanılarak yazılırlar yani bölme işlemleri içermezler. Hatırlanacağı gibi bölünmüş farklar tablosunun oluşturulmasında denklemdeki veriler arasında *h* kadar mesafe olduğu varsayılarak yazılırsa, bölünmüş farklar formülü aşağıdaki formatta yeniden yazılabilir.

Önce, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $s = \frac{x-x_0}{h}$ alalım, buradan da $(x-x_i) = (s-i)h$ olacağından;

$$P_n(x) = P_n(x_0+h) = f[x_0] + shf[x_0,x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0,x_1,x_2] + \\ \dots + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

veya

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0,x_1,\dots,x_k]$$

İleri Farklar:

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots, (x_n, f_n)$$

şeklinde verilen data seti için

Birinci dereceden ileri farklar : $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad , \quad i = 0,1,2, \ldots, n-1$

İkinci dereceden ileri farklar : $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \quad , \quad i = 0,1, \ldots, n-2$

benzer şekilde,

n. dereceden ileri fark : $\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = (\Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i)$

olmak üzere:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f_0$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h}\right] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f_0$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f_0$$

şeklinde elde edilir. Böylece *n* ‘inci dereceden enterpolasyon formülü bu ileri farklar cinsinden

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \frac{s(s-1) \cdots (s-k+1)}{k!} \Delta^k f_0$$

bulunur. Bu formül Newton ileri fark formülü olarak adlandırılır.

Bu ileri farklar polinomu verinin bulunduğu nokta ile bir ileri noktası kullanıldığı için bu ismi almıştır. Eğer istenirse aynı polinom geri farklar ve merkezi farklar biçiminde de yazılabilir. Geri fark tablolarında noktanın kendisi ile bir önceki arasındaki farklar kullanılır ve $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ ile gösterilir. Merkezi farklarda ise noktanın kendisinden bir önceki ve bir sonraki arasındaki farklar kullanılır ve $\delta f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ile gösterilir.

Örnek : Aşağıda verilen tablodaki değerlere göre $f(1.2)$ değerini bulunuz.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f_i = f(x_i)$	1.0	1.65	2.72	4.48	7.39	12.2

Öncelikle ileri fark tablosunu oluşturalım:

i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0	0.0	1.0	0.65	0.42	0.27	0.19	0.10
1	0.5	1.65	1.07	0.69	0.46	0.29	
2	1.0	2.72	1.76	1.15	0.75		
3	1.5	4.48	2.91	1.90			
4	2.0	7.39	4.81				
5	2.5	12.2					

Şimdi ise $s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.2 - 0.0}{0.5} = 2.4$ değeri ve ileri fark formülünden:

$$P_5(1.2) = 1.0 + 2.4 * 0.65 + \frac{2.4(2.4-1)}{2} * 0.42 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)}{6} * 0.27 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)}{24} * 0.19 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)(2.4-4)}{120} * 0.10$$

ve $P_5(1.2) = 3.32$ bulunur.

Eğer $x_0 = 0.5$ seçilirse tablodaki ikinci satırdan polinomu oluştururuz. Yani $s = \frac{1.2-0.5}{0.5} = 1.4$ alırız ve:

$$P_4(1.2) = 1.65 + 1.4 * 1.07 + \frac{1.4(1.4-1)}{2} * 0.69 + \frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{6} * 0.46 + \frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)(1.4-3)}{24} * 0.29$$

buradan da $P_4(1.2) = 3.322$ bulunur.

Birinci durumda $x_0 = 0.0$ ve ikinci durumda $x_0 = 0.5$ değerleri kullanıldığında ileri farklar tablosundaki kullanılan değerlerin sayısı değişmiştir. Fakat her ikisinde de $P_4(1.2)$ ve $P_5(1.2)$ birbirine yakın sonuçlar vermektedir. x ve buna karşılık gelen f değerleri yazılırken aslında $f(x) = e^x$ kullanılmıştır. Fonksiyonun $x = 1.2$ olduğu zaman aldığı gerçek değer $f(1.2) = 3.3201$ 'dır. Buradan görüldüğü gibi $P_5(1.2)$ gerçek değere daha çok yaklaşmıştır, bunun sebebi kullanılan datanın fazla olmasıdır.

Teorem: $x_0, x_1, \dots, x_n$ $[a,b]$ aralığının n farklı noktası ve $f(x) \in C^n[a,b]$ olsun. Bu durumda (a,b) aralığında öyle bir $\xi(x)$ bilinmeyen sayısı mevcuttur ki,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

sağlanır.

Polinom Yaklaşımında Hata

Teorem: $x_0, x_1, \dots, x_n$ $[a,b]$ aralığının *n* farklı noktası ve $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. Her $x \in [a,b]$ için $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktaları arasında öyle bir $\xi(x)$ bilinmeyen sayısı mevcuttur ki,

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

sağlanır. Burada $P_n(x)$ Lagrange veya bölünmüş fark interpolasyon polinomudur. İkinci terim ise polinomsal yaklaşımın hata terimidir.