Gauss Eliminasyonu

Lineer denklem sistemlerini çözmede kullanılan en popüler tekniklerden birisi Gauss Eliminasyonu yöntemidir. Bu yöntem genel bir n denklemli ve n bilinmeyenli lineer sistemin çözümüne bir yaklaşım getirmektedir.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad . \qquad\qquad . \\
\quad . \qquad\qquad . \\
\quad . \qquad\qquad . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Gauss Eliminasyonu iki adımdan oluşur:

1. Bilinmeyenlerin ileriye doğru yok edilmesi (Forward Elimination): Bu adımda, ilk denklemden sonra sırayla herbir denklemdeki bilinmeyenler ardışık şekilde yok edilerek en son denklemde tek bilinmeyen kalana kadar işleme devam edilir.

2. Geriye doğru Yerine Koyma (Back Substitution): Bu adımda, son denklemden başlayarak herbir bilinmeyen bulunur.

Forward Elimination:

Bu adımda ilk olarak birinci bilinmeyen, x_1, ilk satır hariç alttaki tüm satırlarda yok edilir. x_1 'i ikinci denklemde yok etmek için ilk denklem a_{21}/a_{11}, $(a_{11} \neq 0)$ ile çarpılıp ikinci denklemden çıkarılır. Yani ikinci denklem,

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + ... + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

veya

$$a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2$$

Halini alır, burada diğer katsayılar şöyledir:

$$
\begin{array}{l}
a'_{22} = \quad a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \\
\quad \vdots \\
a'_{2n} = \quad a_{2n} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}
\end{array}
$$

x_1'i yok etme prosedürü diğer satırlar için de benzer şekilde tekrar edildiğinde denklem sistemi aşağıdaki biçime indirgenir:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
&a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\
&\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
&\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
&\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
&a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n
\end{aligned}
$$

Sonraki adımda x_2 'yi üçüncü satırdan yok etmek için ikinci denklemi a'_{32}/a'_{22}, ($a_{22} \neq 0$) ile çarpıp üçüncü denklemden çıkarırız. Bu durumda üçüncü denklemde x_2 'nin katsayısı sıfır olmuş olur. Benzer işlemi diğer satırlar içinde de tekrar ettiğimizde denklem sistemi aşağıdaki biçimi alır:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
&a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\
&\quad . \qquad\qquad . \\
&\quad . \qquad\qquad . \\
&\quad . \qquad\qquad . \\
&a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n = b''_n
\end{aligned}
$$

Bu şekilde $n-1$ tane ileriye doğru yok etme adımından sonra denklem sistemimiz şu son halini alır:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
. \qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad . \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Back Substitution:

Son denklemden başlayarak bilinmeyenleri bulalım. Son denklem sadece bir bilinmeyen içerdiği için, kolaylıkla

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

elde ederiz.

Sondan bir önceki $(n-1)$'inci denklem iki bilinmeyen içermekte: x_n and x_{n-1}, fakat x_n zaten bilindiği için bu denklemde bilinmeyen sayısı aslında bir tanedir. Bu şekilde diğer bilinmeyenler için geriye doğru her satırda yerine koyma uyguladığımızda tüm bilinmeyenler aşağıdaki formülle elde edilmiş olur:

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad , \; i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

ve

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Örnek 1

Bir roketin yukarı doğru hızı üç farklı zamanda Tablo 1 'de verilmiştir.

Tablo 1 Hız ve Zaman datası.

Zaman, t (s)	Hız, v (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Hızla ilgili datayı ikinci mertebeden bir yaklaşım polinomunda kullanalım:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12$$

Yukarıdaki $a_1, a_2, ve\ a_3$ katsayıları aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$a_1, a_2, \text{ve } a_3$ katsayılarını Gauss eliminasyon yöntemi ile bulun. Roketin $t = 6, 7.5, 9, 11$ anlarındaki hızı nedir?

Çözüm

Forward Elimination

Üç denklem olduğu için iki adımlı ileriye doğru yok etme uygulanacak.

<u>İlk Adım</u>

Satır 1 ‘i $64/25 = 2.56$ ile çarpıp Satır 2 ‘den çıkaralım

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Satır 1 ‘i $144/25 = 5.76$ ile çarpıp Satır 3 ‘ten çıkaralım. Bu işlemlerle ilk adımda aşağıdaki system elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ -335.968 \end{bmatrix}$$

<u>İkinci Adım</u>

Satır 2 ‘yi $-16.8/-4.8 = 3.5$ ile çarpıp Satır 3 ‘ten çıkaralım. İkinci adım sonucunda elde edilen sistem:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Back substitution

Üçüncü denklemden

$$0.7a_3 = 0.76$$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7} = 1.08571$$

a_3 değerini ikinci denklemde yerine koyarsak,

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8} = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8} = 19.6905$$

a_2 ve a_3 değerlerini ilk denklemde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} 25a_1 + 5a_2 + a_3 &= 106.8 \\ a_1 &= \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25} \\ &= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25} \\ &= 0.290472 \end{aligned}$$

Aşağıdaki çözüm vektörü elde edilir:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki sonuca göre üç data noktamızın üzerinden geçen polinom şudur:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\ &= 0.290472t^2 + 19.6905t + 1.08571, \quad 5 \le t \le 12 \end{aligned}$$

Şimdi ise biz $t = 6, 7.5, 9 \text{ and } 11$ saniyelerindeki hızı bulmak istediğimizden basitçe istediğimiz t değerini $v(t) = 0.290472t^2 + 19.6905t + 1.08571$ hız fonksiyonunda yerine koyarak ona ilişkin hızı bulabiliriz. Örneğin, $t = 6$ anında:

$$\begin{aligned} v(6) &= 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 \\ &= 129.686 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Bununla birlikte t = 6, 7.5, 9, 11 saniyelerinde istediğimiz hız değerlerini matris çarpımını kullanarakta bulabiliriz.

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0.290472 & 19.6905 & 1.08571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yani, $v(6), v(7.5), v(9), v(11),$ değerleri şu şekilde bulunur:

$$\begin{bmatrix} v(6) \, v(7.5) \; v(9) \, v(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 & 19.6905 & 1.08571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^2 & 7.5^2 & 9^2 & 11^2 \\ 6 & 7.5 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.290472 & 19.6905 & 1.08571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & 56.25 & 81 & 121 \\ 6 & 7.5 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 129.686 & 165.104 & 201.828 & 252.828 \end{bmatrix}$$

$v(6) = 129.686$ m/s
$v(7.5) = 165.104$ m/s
$v(9) = 201.828$ m/s
$v(11) = 252.828$ m/s

Örnek 2

Aşağıdaki sistemi Gauss eliminasyon ile çözünüz

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45$$
$$-3x_1 - 2.249x_2 + 7x_3 = 1.751$$
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$$

Hesaplamalarda 6 yararlı basamak ve kesme uygulayınız.

Çözüm

Sistemin matris formu şöyledir:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Forward Elimination

<u>İlk adım</u>

Satır 1 'i $-3/20 = -0.15$ ile çarpıp Satır 2 'den çıkaralım,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Satır 1 'i $5/20 = 0.25$ ile çarpıp Satır 3 'ten çıkaralım,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

<u>İkinci adım</u>

Satır 2 ‘yi $-2.75/0.001 = -2750$ ile çarpıp Satır 3 ‘ten çıkaralım

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & 0 & 23375.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ 23375.4 \end{bmatrix}$$

Yok etme adımları sonucunda yukarıdaki sistem elde edilir.

Back substitution

Üçüncü denklemden,

$$\begin{aligned} 23375.5x_3 &= 23375.4 \\ x_3 &= \frac{23375.4}{23375.5} \\ &= 0.999995 \end{aligned}$$

x_3 değerini ikinci denklemde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} &0.001x_2 + 8.5x_3 = 8.501 \\ &x_2 = \frac{8.501 - 8.5x_3}{0.001} \\ &= \frac{8.501 - 8.5 \times 0.999995}{0.001} \\ &= \frac{8.501 - 8.49995}{0.001} \\ &= \frac{0.00105}{0.001} \\ &= 1.05 \end{aligned}$$

x_3 ve x_2 değerini ilk denklemde yerine koyarsak,

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{45-15\,x_2-10x_3}{20} \\
&= \frac{45-15\times1.05-10\times0.999995}{20} \\
&= \frac{45-15.75-9.99995}{20} \\
&= \frac{29.25-9.99995}{20} \\
&= \frac{19.2500}{20} \\
&= 0.9625
\end{aligned}
$$

Böylelikle çözüm vektörü $[X]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.999995 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Sistemin gerçek çözümü ise $\left[X\right]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ‘dir.

Gauss eliminasyon metodundaki zayıf yönler:

Sıfır ile bölme hatası: (Forward elimination) ileriye doğru yok etme safhasındaki $n-1$ adımın herhangi birinde sıfır ile bölme işlemi söz konusu olabilir. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
5x_2+6x_3 &= 11 \\
4x_1+5x_2+7x_3 &= 16 \\
9x_1+2x_2+3x_3 &= 15
\end{aligned}
$$

sisteminde ilk adımda x_1 ‘in katsayısı sıfır olduğu için sıfır ile bölme söz konusudur. Bu durum sistemin matris formunda yazılması ile daha açık görülebilir.

$$
\begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 15 \end{bmatrix}
$$

Aşağıdaki örnekte ise daha farklı bir durum söz konusudur.

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 18$$
$$10x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 25$$
$$20x_1 + 17x_2 + 19x_3 = 56$$

matris formunda,

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 25 \\ 56 \end{bmatrix}$$

Ileriye doğru yok etmenin ilk adımında sıfır ile bölme durumu yoktur. Fakat ilk adımın sonunda elde ettiğimiz sistemde bu durum söz konusudur.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -11 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Yok etmenin ikinci adımında x_2 ‘nin katsayısı sıfır olduğu için sıfır ile bölme problemi ortaya çıkmaktadır.

Buradan vardığımız sonuç sıfır ile bölmenin ileriye doğru yok etmenin herhangi bir adımının başlangıcında olası bir problem olarak ortaya çıkabileceğidir.

Yuvarlama (Round-off) hatası: Gauss eliminasyon metodunda yuvarlama hatası denklem sayısının fazlalığına ve yapılan işlemlere bağlı olarak büyüme eğilimi gösterebilir. Aşağıdaki örneğe bakalım.

Örnek 3

Gauss eliminasyon yöntemini kullandığımız **Örnek 2** ‘yi hatırlayalım:

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45$$
$$-3x_1 - 2.249x_2 + 7x_3 = 1.751$$
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$$

Bu sistemin çözümündeki hesaplamalarda 6 yararlı basamak ve kesme kullanmıştık. Şimdi aynı problemi 5 yararlı basamak ve kesme aritmetiği ile tekrar edelim.

Çözüm

Sistemin matris formu:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Forward Elimination

Birinci adımın sonunda,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

İkinci adımın sonunda ise,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & 0 & 23375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ 23374 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Back substitution

Şimdi çözüme geçelim. Üçüncü denklemden,

$$23375x_3 = 23374$$
$$x_3 = \frac{23374}{23375}$$
$$= 0.99995$$

Ikinci denklemden,

$$0.001x_2 + 8.5x_3 = 8.501$$
$$x_2 = \frac{8.501 - 8.5x_3}{0.001}$$
$$= \frac{8.501 - 8.5 \times 0.99995}{0.001}$$
$$= \frac{8.501 - 8.4995}{0.001}$$
$$= \frac{0.0015}{0.001} = 1.5$$

Ve ilk denklemden,

$$
\begin{aligned}
&20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45 \\
&x_1 = \frac{45 - 15\,x_2 - 10x_3}{20} \\
&\quad = \frac{45 - 15\times 1.5 - 10\times 0.99995}{20} \\
&\quad = \frac{45 - 22.5 - 9.9995}{20} \\
&\quad = \frac{22.5 - 9.9995}{20} \\
&\quad = \frac{12.5005}{20} \\
&\quad = \frac{12.500}{20} \\
&\quad = 0.625
\end{aligned}
$$

Böylece çözüm $[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.5 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$

Halbuki gerçek çözümümüz: $[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ’dir.

Gauss eliminasyon metodunu geliştirmek için kullanılan teknikler

Örnek 3 ‘ten görüldüğü gibi yuvarlama hatası 6 basamak yerine 5 basamak hesaplama aritmetiği kullanıldığında daha fazladır. Bu hatayı azaltmanın bir yolu daha fazla yararlı basamak kullanılmasıdır. Fakat, bunun sıfır ile bölme hatasını gidermede bir faydası olmayacaktır. Gauss eliminasyon metodunda sıfır ile bölmeden kaçınmak ve yuvarlama hatasını azaltmak için kullanılan bir teknik **Kısmi Pivot** uygulamasıdır.

Kısmi Pivotlu Gauss Eliminasyon

Kısmi pivot uygulamasında herbir yok etme adımının başlangıcında aşağıdaki kritere göre bir satır değişimi yapılır. Eğer sistemde n tane denklem varsa, $n-1$ tane ileriye doğru yok etme adımı olacaktır. k ’yıncı yok etme adımının başlangıcında, k sütununun k satırından sonraki elemanlar arasında maksimum bulunur.

$$|a_{kk}|, |a_{k+1,k}|, \ldots\ldots\ldots\ldots, |a_{nk}| \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Daha sonra bulunan bu maksimum değere göre satır değişimi yapılır. Eğer yukarıdaki sayıların maksimumu p satırındaki $|a_{pk}|$, $k \le p \le n$, ise p and k satırları arasında yer değişimi yapılır.

Bunun dışında diğer bütün işlemler yalın Gauss yöntemi ile aynıdır.

Örnek 4

Önceki örnekte yalın Gauss yöntemi ve 5 yararlı basamak kesme aritmetiği kullanarak,

$$\begin{aligned}
20x_1 + 15x_2 + 10x_3 &= 45 \\
-3x_1 - 2.249x_2 + 7x_3 &= 1.751 \\
5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9
\end{aligned}$$

sistemini çözdük ve çözümü,

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.5 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$$

Olarak bulduk. Aslında gerçek çözüm bundan farklı olarak,

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde idi. Yuvarlama hatası oldukça büyük çıkmıştı. Şimdi aynı sistemi kısmi pivotlu Gauss eliminasyon yöntemi ve 5 yararlı basamak kesme aritmetiği kullanarak çözelim.

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Forward Elimination

Birinci yok etme adımı için birinci sütunun mutlak değerce maksimumunu bulalım,

$|20|, |-3|, |5|$ veya

20, 3, 5

Maksimum değer 20 ve bu değer birinci satırda yer aldığından bir satır değişimine gerek yok ve birinci sütun için pivot elemanımız 20'dir.

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

İlk adımda bu pivot elemana göre yok etme uyguladığımızda,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir.

İkinci yok etme adımı için, ilk satırın altında kalan ikinci sütun elemanlarının mutlak değeri,

$$|0.001|,\ |-2.75| \qquad \text{veya} \qquad 0.001,\ 2.75$$

olduğundan maksimum değer 2.75 olarak üçüncü satırdadır. Yani, ikinci satır ile üçüncü satır yer değiştirilir,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2.25 \\ 8.501 \end{bmatrix}$$

İkinci adımda –2.75 pivot elemanına göre yok etme uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \\ 0 & 0 & 8.5001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -2.25 \\ 8.5001 \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir.

Back substitution

$$8.5001 x_3 = 8.5001$$

$$x_3 = \frac{8.5001}{8.5001} = 1$$

İkinci denklemden,

$$-2.75x_2 + 0.5x_3 = -2.25$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-2.25 - 0.5x_2}{-2.75} \\ &= \frac{-2.25 - 0.5\times 1}{-2.75} \\ &= \frac{-2.25 - 0.5}{-2.75} \\ &= \frac{-2.75}{-2.75} \\ &= 1 \end{aligned}$$

İlk denklemden,

$$20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{45 - 15x_2 - 10x_3}{20} \\ &= \frac{45 - 15\times 1 - 10\times 1}{20} \\ &= \frac{45 - 15 - 10}{20} \\ &= \frac{30 - 10}{20} \\ &= \frac{20}{20} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Yani çözüm: $[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Bu örneğe has olarak yuvarlama hatasının sıfırlandığını ve çözümün gerçek çözümle aynı olduğunu görüyoruz. Bununla birlikte, kısmi pivot uygulamasının yuvarlama hatasını azaltacağı da aşikardır.

Yalın Gauss eliminasyon metodu bir kare matrisin determinantını bulmak için kullanılabilir mi?

Aşağıdaki teoremlerin avantajlarını yalın Gauss eliminasyon yöntemi ile birleştirdiğimizde kare bir matrisin determinantının bu yöntemle bulunabileceğini görürüz.

Teorem 1:

$[A]$, $n \times n$ bir matris olsun. Bu durumda, eğer $[B]$, $n \times n$ matrisi A 'nın bir satırının bir sabitle çarpılıp diğer bir satırına eklenmesi suretiyle elde edildiyse, $\det(A) = \det(B)$ 'dir.

Teorem 2:

$[A]$, $n \times n$ bir üst üçgen matris, alt üçgen matris veya köşegen matrsi ise,

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{ii} \times \ldots \times a_{nn} \quad = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ 'dır.}$$

Teorem 1'e göre, bir kare matrise yalın Gauss metodunun yok etme adımlarını uyguladığımızda matrisin determinant değişmeden kalıyor. Yok etme adımlarının sonunda elde edilen matris bir üst üçgen matris olduğundan matrisin determinantı Teorem 2'ye göre kolaylıkla hesaplanabilir.

Örnek 5

Aşağıdaki matrisin determinantını bulun

$$[A] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Çözüm

Örnek 1 'de bu matrise yok etme adımlarını uygulayıp aşağıdaki matrisi elde etmiştik,

$$[B] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Teorem 2'ye göre,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(B) \\ &= 25 \times (-4.8) \times 0.7 \\ &= -84.00 \end{aligned}$$

Determinant hesabı için Gauss metodu kullanılırken eğer sıfıra bölme problemi ile karşılaşılırsa ne yapılır?

Kısmi pivotlu Gauss eliminasyon metodu kullanılabilir. Fakat bunu yaparken aşağıdaki teorem gözönüne alınmalıdır.

Teorem 3:

$[A]$, $n \times n$ bir matris olsun. Bu durumda, eğer $[B]$ $n \times n$ matrisi A 'nın iki satırının yer değiştirilmesiyle elde ediliyorsa, $\det(B) = -\det(A)$.

Örnek 6

Aşağıdaki matrisin determinantını bulun

$$[A] = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Çözüm

Kısmi pivotlu Gauss eliminasyon metodunun yok etme adımları uygulandığında aşağıdaki matris elde edilir,

$$[B] = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= 10 \times 2.5 \times 6.002 \\ &= 150.05 \end{aligned}$$

Fakat, bu matris elde edilirken bir kez satır değişimi gerçekleştiğinden,

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det(B) \\ &= -150.05 \end{aligned}$$