LU Dekompozisyonu

Tekil olmayan bir $[A]$ matrisi için yalın Gauss eliminasyon yönteminin ileriye doğru yok etme adımlarını takip ederek her zaman, aşağıdaki LU-dekompozisyonu gösterilim biçimini elde edebiliriz

$$[A]=[L][U]$$

burada

$[L]$= Alt üçgen matris
$[U]$ = Üst üçgen matris

olarak tanımlıdır. Bu gösterilimi aşağıdaki denklem sisteminin çözümünde kullanmak istersek

$$[A][X]=[C],$$

sisteminde

$$[L][U][X]=[C] \text{ çünkü } ([A]=[L][U])$$

Şimdi öyle bir Z vektörü tanımlayalım ki,

$$[L][Z]=[C] \qquad (1)$$

ve

$$[U][X]=[Z] \qquad (2)$$

yazarak, önce denklem (1) ‘i $[Z]$ için sonra da denklem (2) ‘yi çözüm vektörü $[X]$ için çözeriz. Böylelikle sonuca ulaşmış oluruz.

Tekil olmayan $[A]$ matrisi nasıl dekompoze edilir, yani, $[A]=[L][\mathrm{U}]$ nasıl bulunur?

Eğer yalın Gauss eliminasyon yönteminin yok etme adımları tekil olmayan $[A]$ matrisine uygulanırsa bu matrisi aşağıdaki LU biçimine dekompoze edilir;

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$[U]$ matrisinin elemanları yalın Gauss eliminasyon yönteminin yok etme adımları sonucunda elde edilen üst üçgen matrisin elemanları ile aynıdır. Diğer taraftan $[L]$ alt üçgen matrisinin köşegen elemanları 1 olmakla birlikte, sıfırdan farklı diğer elemanlar $[U]$matrisini elde etmek için Gauss eliminasyon yöntemi uygulanırken her bir yok etme adımında kullanılan çarpanlardan elde edilmektedir. Bunu örnekler üzerinde görelim.

Gauss eliminasyon yönteminde diyagonal altındaki elemanların sıfırlanması için yapılan a_{ik}/a_{kk} bölme işleminin sonucu, diyagonalin altında sıfır olması gereken elemanın yerine yazıldığı taktirde, sonuçta üst-üçgensel olması gereken matrisin diyagonal altında yeni bir matris oluşur.

Örnekolarak daha önceki denklem takımı alınırsa $\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right]$

$$\begin{array}{l} R_2-(-3/4)\times R_1 \rightarrow \\ R_3-(1/4)\times R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & -0.5 & 2.75 & 9.25 \end{array}\right] \quad \text{yerine} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3/4 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 1/4 & -0.5 & 2.75 & 9.25 \end{array}\right]$$

$$R_3-(\frac{-0.5}{-2.5})\times R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & 0 & 1.80 & 5.40 \end{array}\right] \quad \text{yerine} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3/4 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 1/4 & \frac{-0.5}{-2.5} & 1.80 & 5.40 \end{array}\right]$$

Böylece katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -0.75 & -2.5 & 4.75 \\ 0.25 & 0.20 & 1.80 \end{bmatrix}$

şeklini alır. Bu matris $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.20 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & 0 & 1.80 \end{bmatrix}$

şeklinde düzenlenirse, buradaki alt-üçgensel matrisle üst-üçgensel matrisin çarpımının yukarıdaki orijinal katsayılar matrisini verdiği gösterilebilir.

Yani $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.20 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & 0 & 1.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Böylece katsayılar matrisi $A=L.U$ şeklinde çarpanlara ayrıştırılmış olmaktadır.

LU çarpanlara ayırma işlemi bir matrisin determinantının hesabı için etkin bir yöntemdir. Şöyle ki:

Yukarıdaki örnekte söz konusu olana katsayılar matrisinin determinantı, kofaktörler yardımıyla hesaplanırsa

$$\det(A)=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ -3 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4\times 1+3\times(-5)+1\times(-7)=-18$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan iki matrisin çarpımının determinantı bu matrislerin determinantlarının çarpımına eşittir. Buna göre örnekteki matrisin determinantı bunun LU çarpanlarının determinantları çarpımına eşit olacaktır.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -0.75 & 1 & 0\\ -0.25 & 0.20 & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & -2.5 & 4.75\\ 0 & 0 & 1.80\end{vmatrix}$$

Bu matrislerin her birinin determinantlarının diyagonal elemanları çarpımına eşit olduğu kolaylıkla görülmektedir. Buna göre

$$\det(A)=(1\times 1\times 1)\times\left(4\times -2.5\times 1.80\right)=-18$$

elde edilir.

Example 1

Find the LU decomposition of the matrix

$$[A]=\begin{bmatrix}25 & 5 & 1\\ 64 & 8 & 1\\ 144 & 12 & 1\end{bmatrix}$$

Solution

$$[A]=[L][U]$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

The $[U]$ matrix is the same as found at the end of the forward elimination of Naïve Gauss elimination method, that is

$$[U]=\begin{bmatrix}25 & 5 & 1\\ 0 & -4.8 & -1.56\\ 0 & 0 & 0.7\end{bmatrix}$$

To find ℓ_{21} and ℓ_{31}, find the multiplier that was used to make the a_{21} and a_{31} elements zero in the first step of forward elimination of the Naïve Gauss elimination method. It was

$$\ell_{21} = \frac{64}{25}$$
$$= 2.56$$
$$\ell_{31} = \frac{144}{25}$$
$$= 5.76$$

To find ℓ_{32}, what multiplier was used to make a_{32} element zero? Remember a_{32} element was made zero in the second step of forward elimination. The $[A]$ matrix at the beginning of the second step of forward elimination was

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix}$$

So

$$\ell_{32} = \frac{-16.8}{-4.8}$$
$$= 3.5$$

Hence

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Confirm $[L][U] = [A]$.

$$[L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 2

Use the LU decomposition method to solve the following simultaneous linear equations.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Solution

Recall that

$$[A][X] = [C]$$

and if

$$[A] = [L][U]$$

then first solving

$$[L][Z]=[C]$$

and then

$$[U][X]=[Z]$$

gives the solution vector $[X]$.

Now in the previous example, we showed

$$[A]=[L][U]$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

First solve

$$[L][Z]=[C]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

to give

$$z_1 = 106.8$$

$$2.56z_1 + z_2 = 177.2$$

$$5.76z_1 + 3.5z_2 + z_3 = 279.2$$

Forward substitution starting from the first equation gives

$$z_1 = 106.8$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 177.2 - 2.56z_1 \\ &= 177.2 - 2.56 \times 106.8 \\ &= -96.208 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 279.2 - 5.76z_1 - 3.5z_2 \\ &= 279.2 - 5.76 \times 106.8 - 3.5 \times (-96.208) \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

Hence

$$[Z]=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

This matrix is same as the right hand side obtained at the end of the forward elimination steps of Naïve Gauss elimination method. Is this a coincidence?

Now solve

$$[U][X]=[Z]$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$
$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$
$$0.7a_3 = 0.76$$

From the third equation

$$0.7a_3 = 0.76$$
$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$
$$= 1.0857$$

Substituting the value of a_3 in the second equation,

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$
$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8}$$
$$= \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.0857}{-4.8}$$
$$= 19.691$$

Substituting the value of a_2 and a_3 in the first equation,

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$
$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$
$$= \frac{106.8 - 5 \times 19.691 - 1.0857}{25}$$
$$= 0.29048$$

Hence the solution vector is

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29048 \\ 19.691 \\ 1.0857 \end{bmatrix}$$