# LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ-2

## 1) SABİT NOKTA İTERASYONU YÖNTEMİ

Bu yöntemde çözüme gitmek için $f(x)=0$ olarak verilen denklem x=g(x) şekline getirilir. Bir $x_0$ başlangıç değeri seçilir ve $x_{n+1}=g(x_n)$ ardışık yineleme formülüyle çözüme gidilir.

Bu basit bir algoritmayla özetlenirse :

a) Başlangıç değerini ( $x_0$ ) seç.
b) f(x) fonksiyonunu g(x) =x olarak ifade et.
c) $x_1$ = g( $x_0$ ) değerini hesapla
d) Hata = $|x_1 - x_0|$ değeri hesapla
e) Hata istenilen hata değerinden büyükse $x_0$ = $x_1$ al ve c adımına geri dön , değilse f. adımına git
f) $x_1$ değerini yaz ve dur

**Örnek:** $f(x)=x^2-5=0 \Rightarrow$ 1.) $x=x^2+x-5=g_1(x)$ 2.) $x=\dfrac{5}{x}=g_2(x)$

3.) $x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{x}\right)=g_3(x)$

Örnekten de anlaşıldığı gibi f(x) fonksiyonundan birden fazla g(x) fonksiyonu türetilebilir. Burada önemli olan hangi g(x) fonksiyonu için $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olacağıdır. Bunu aşağıdaki tanım ve teoremlerle anlayacağız.

**Tanım:** Eğer x = p noktasında g(p) = p sağlanıyorsa, p noktası g(x) fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

**Teorem:** Eğer g Є C[a,b] ve her x Є [a,b] için g(x) Є [a,b] oluyorsa, g(x) fonksiyonu [a,b] ‘de en azından bir sabit noktaya sahiptir. Ve eğer g’(x) (a,b) ‘de mevcut ve her x Є (a,b) için |g’(x)| ≤ k olacak şekilde bir 0 < k < 1 pozitif sayısı mevcutsa bu durumda [a,b] kesin olarak bir sabit nokta vardır.

**Örnek:** $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{x^2+4}{5}=g(x) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{2x}{5}$

[0,2] aralığında g(x) en az bir sabit noktaya sahiptir. Çünkü teoremin ilk koşulu sağlanıyor.

Yani, her x Є [0,2] için g(x) Є [0,2] sağlanıyor ve g(x) bu aralıkta sürekli, ve her x Є (a,b) için |g'(x)| ≤ k olacak şekilde bir 0 < k < 1 pozitif sayısı mevcut olduğundan

$$|g'(x)| = |2x/5| < 4/5 < 1 \quad , \quad x \in (0,2)$$

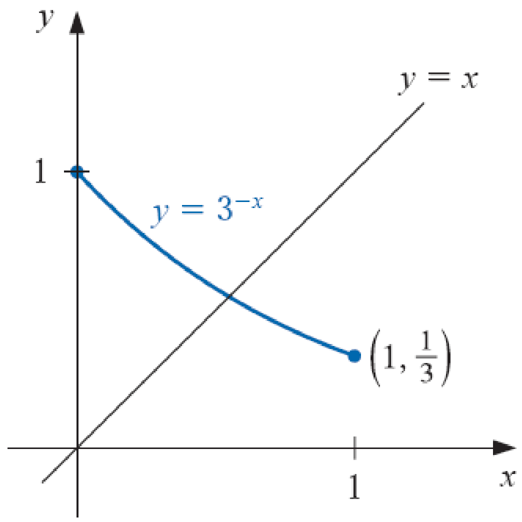
g(x), [0,2] aralığında tek sabit noktaya sahiptir.

g(1) = 1 olduğundan bu sabit nokta p = 1 dir.

**Örnek:** $g(x) = 3^{-x}$ [0,1] aralığında en az bir sabit noktaya sahiptir. Çünkü,

Her x Є [0,1] için 0 ≤ g(x) ≤ 1 sağlanıyor. Fakat,

$g'(x) = -3^{-x}\ln 3$ ve x Є (0,1) için $|g'(x)| \not\leq 1$ olduğundan teoremin ikinci koşulu sağlanmıyor. Yani sabit noktanın var olduğunu söyleyebiliyoruz, fakat tek olduğunu söyleyemiyoruz. Aslında durumu grafiksel olarak incelersek,




y = g(x) ile y = x [0,1] aralığında tek bir noktada kesişiyorlar (g(x) = x oluyor). Bu g(x) 'in tek sabit noktası olduğunu gösterir. Bu örnekten anlaşılıyor ki, teoremin ikinci koşulu sağlanmasa bile verilen aralıkta tek sabit nokta olabilir. Bu durumda ikinci koşul teklik için gerekli değil yeterli koşuldur.

Şimdi, $x_{n+1} = g(x_n)$ ardışık yaklaşımının yakınsaklığı ile ilgili teoremi ifade edelim.

**Sabit Nokta Teoremi:** g Є C[a,b] ve her x Є [a,b] için g(x) Є [a,b] olsun. Ve farz edelim ki, g'(x) (a,b) 'de mevcut ve her x Є (a,b) için |g'(x)| ≤ k olacak şekilde bir 0 < k < 1 pozitif sayısı mevcut olsun. Bu durumda herhangi bir $x_0$ Є [a,b] sayısı için

$$x_{n+1} = g(x_n) , \quad n \geq 0$$

dizisi tek sabit nokta p Є [a,b] 'ye yakınsar.

Bir önceki örnekten aldığımız sonuç burada da geçerlidir. Yani $|g'(x)| \leq k$ olmasa bile $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olabilir. Yani verilen koşul gerekli değil yeterli koşuldur.

**Örnek:** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin [1,2] aralığında tek bir kökü vardır. Bu köke sabit nokta iterasyonu ile yaklaşmaya çalışalım. Bunun için birkaç tane g(x) fonksiyonu seçelim.

**(a)** $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

**(b)** $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

**(c)** $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

**(d)** $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{1/2}$

**(e)** $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

şeklinde 5 farklı fonksiyon tanımladık. Başlangıç noktası olarak $x_0 = 1.5$ alırsak her bir fonksiyon için aşağıdaki dizileri elde ederiz:

| $n$ | $(a)$ | $(b)$ | $(c)$ | $(d)$ | $(e)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 |
| 1 | −0.875 | 0.8165 | 1.286953768 | 1.348399725 | 1.373333333 |
| 2 | 6.732 | 2.9969 | 1.402540804 | 1.367376372 | 1.365262015 |
| 3 | −469.7 | $(-8.65)^{1/2}$ | 1.345458374 | 1.364957015 | 1.365230014 |
| 4 | $1.03 \times 10^8$ | | 1.375170253 | 1.365264748 | 1.365230013 |
| 5 | | | 1.360094193 | 1.365225594 | |
| 6 | | | 1.367846968 | 1.365230576 | |
| 7 | | | 1.363887004 | 1.365229942 | |
| 8 | | | 1.365916734 | 1.365230022 | |
| 9 | | | 1.364878217 | 1.365230012 | |
| 10 | | | 1.365410062 | 1.365230014 | |
| 15 | | | 1.365223680 | 1.365230013 | |
| 20 | | | 1.365230236 | | |
| 25 | | | 1.365230006 | | |
| 30 | | | 1.365230013 | | |

(a) ve (b) fonksiyonlarından elde edilen dizi sabit noktaya yakınsamıyor diğer üçü ise p = 1.365230013 sabit noktasına yakınsıyorlar, fakat yakınsama hızları farklı, buradan g(x) fonksiyonunun seçiminin ne kadar önemli olduğu ortaya çıkmış oluyor.

**ÖRNEK :** $x_0 = 0{,}5$ ve $x_{n+1} = e^{(-x_n)}$ n= 0,1,…….. için çözünüz.

$x_1 = e^{(-0{,}50000)} = 0{,}606531$ $\quad$ $x_2 = e^{(-0{,}606531)} = 0{,}545239$

$x_3 = e^{(-0,545239)} = 0,579703$ $\qquad$ $x_4 = e^{(-0,579703)} = 0,560065$

.
.
.
.
.
.

$x_9 = e^{(-0,566409)} = 0,567560$ $\qquad$ $x_{10} = e^{(-0,567560)} = 0,566907$

$\lim_{x \to \infty} x_n = 0,567143\ldots$

$0,567143\ldots = e^{(-0,567143\ldots)}$

## 2) NEWTON - RAPHSON YÖNTEMİ

Eşitlik köklerinin bulunmasında en yaygın kullanılan yöntemlerden birisi de Newton - Raphson yöntemidir. Yöntemin temeli aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi başlangıç değerinin fonksiyonu kestiği noktada çizilen teğetin yatay ekseni kestiği yeni nokta başlangıç değeri ile değiştirilerek köke yaklaşmaya çalışmaktır. Bu yeni nokta çoğu zaman başlangıç değerine göre daha yaklaşık bir köktür. Taylor serisi açılımından hareketle Newton - Raphson yöntemi yakınsama ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).\frac{h}{1!} + R(x) \qquad \text{( R kalan terimi ifade ediyor.)}$$

$$f(x) = 0$$

$$x = x_0 + h$$

$$h = (x - x_0)$$

Burada yukarıdaki eşitlikler kullanılarak ilk eşitlik aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir.

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) \approx 0.0$$

$$h = x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

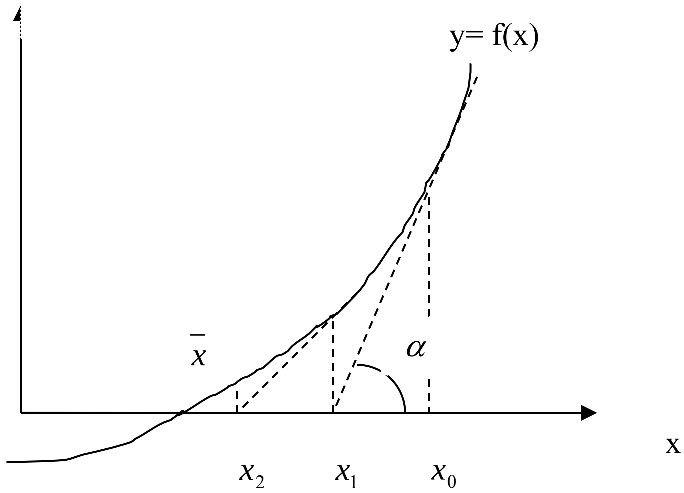
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Son bulunan eşitlik başlangıç değeri , fonksiyon değeri , ve fonksiyonun başlangıç değeri ile elde edilen türevi kullanılarak elde edilen yeni yaklaşık kök değeridir. Bu ifadeyi genelleştirerek bir iterasyon ifadesi şeklinde aşağıdaki eşitlik şeklinde yazılabilir.

$$n \geq 0 \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bir başka yaklaşımla (f( $x_0$ ) , $x_0$ ) noktasındaki teğetin eğimi aşağıdaki eşitlik şeklinde olduğu bilinmektedir. Bu eğim fonksiyon değerinin , başlangıç değeri ( $x_0$ ) ile yeni yaklaşık değer ( $x_1$ ) farkına oranı şeklinde yazılabilir.

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} = f'(x_0)$$




Bu eşitlik düzenlenirse daha önceden yazılmış olan Newton - Raphson eşitliği ile aynı ifadedir.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = \underbrace{x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}_{g(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0$ olduğundan yakınsaklık için yeterli şart :

$$g'(x) = \frac{f(x) * f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} < 1,$$

olmasıdır.

ÖRNEK : f(x) = $x^2$ -4x-5 fonksiyonunun kökünün -1 olduğu bilinmektedir. Bu kökün elde edilmesi için Newton - Raphson yöntemini kullanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM : Yakınsama kuralını inceleyelim :

$$\left| \frac{f''(x_0).f(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2} \right| \langle\ 1 \text{ olmalı}$$

f(x)= $x^2$-4x-5

f ' (x) = 2x-4

f '' (x) = 2

$x_0$ = 0 başlangıç değeri aldığımızda üstteki formülde yerine yazılırsa 1 den küçük çıktığı görünmektedir. Bu yüzden de $x_0$ = 0 a göre işlem yapmaya başlayabiliriz :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_1$ = 0 - (-5/-4)

$x_1$ = -1,25

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$x_2$ = (-1,25) - (1,56/(-6,5))

$x_2$ = -1,01

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$x_3$ = (-1,01) - (0,0601/(-6,02))

$x_3$ = -1,009

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$x_4$ = (-1,009) - (0,054081/(-6,018))

$x_4$ = -1,00001346 yani kök 5 yararlı basamakla bulunmuş olur.

**Örnek Algoritma:**

Compute $f(x_0), f'(x_0)$

Set $x_1 = x_0$.

IF ( $f(x_0) \neq 0$) AND ( $f'(x_0) \neq 0$)

  Repeat

    Set $x_0 = x_1$

    Set $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

  Until $\left(|x_0 - x_1| < \text{tolerans}\right)$ veya

    $|f(x_1)| < \text{tolerans}$

3) KİRİŞ (SECANT) YÖNTEMİ:

$f(x)=0$ denkleminin $x=$ p noktasında bir kökü bulunsun ve $f$ bu nokta civarında sürekli olsun. p noktasına yakın $x_0$ ve $x_1$ başlangıç noktalarını alalım.

Önceki yöntemde kullandığımız kiriş doğruları yardımıyla köke yaklaşacağız. Yani, ($x_0$,f($x_0$)) ve ($x_1$,f($x_1$)) noktalarını birleştiren doğrunun $x$-eksenini kestiği noktayı $x_2$ olarak işaretliyeceğiz ve bu $x$ = p köküne ilk yaklaşımımız olacak. İşlem bu şekilde devam ettirildiğinde

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}} \quad , \quad n=1,2,...$$

dizisi elde edilir ve istenilen hassasiyette döngü belli bir kriterle durdurulur.

**Örnek Algoritma:**

Repeat
  Set $x_2=x_0-f(x_0)\times(x_0 - x_1)/[f(x_0)-f(x_1)]$.
  Set $x_0=x_1$.
  Set $x_1=x_2$.
Until $(*)$.

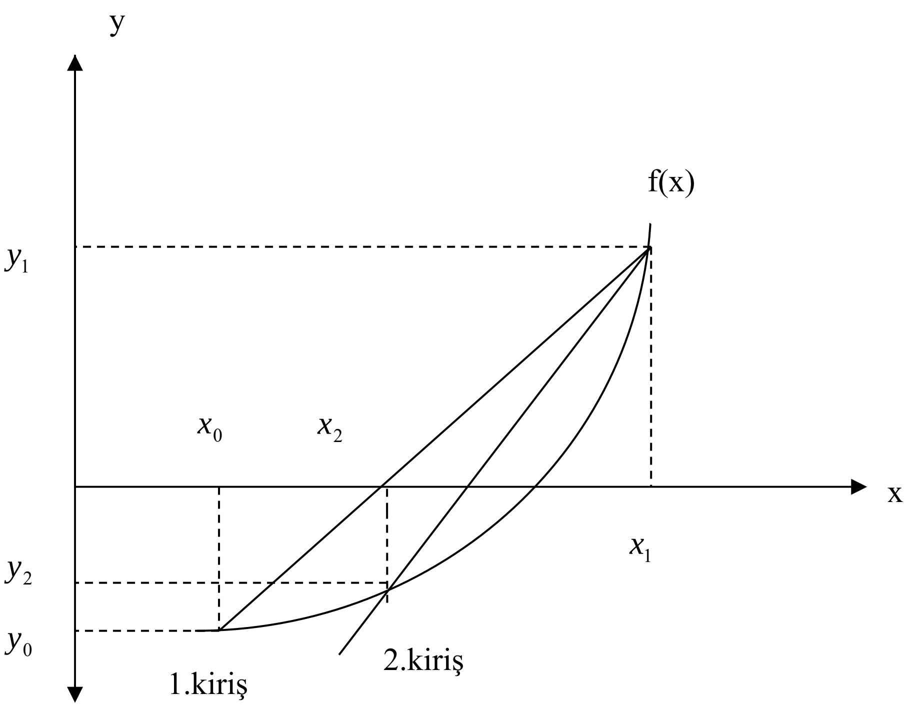
4) LİNEER İNTERPOLASYON (FALSE POSITION-REGULA FALSİ) YÖNTEMİ

$f(x)=0$ denkleminin $[x_0,x_1]$ aralığında bir kökü bulunsun ve $f$ bu aralıkta sürekli olsun $f(x_0)\times f(x_1)<0$.

Bu yöntem de aralık yarılama yöntemiyle aynı esasa dayanmaktadır. Ancak bu defa farklı işarete sahip f($x_0$)ve f($x_1$) değerlerini veren $x_0$ ve $x_1$ apsisleri arasındaki $x_2$ noktası f(x) in f($x_0$) ve f($x_1$) den geçen kirişinin x eksenini kestiği nokta olarak kabul edilmekte ve f($x_2$) hesaplanarak bu değer f($x_1$) ve f($x_0$) dan hangisi ile aynı işarette ise onun yerine konularak istenilen hata düzeyine kadar işlem tekrar edilir.

İterasyon için kökün hangi aralığa düştüğü bilinmesi gerekir. Kök ya ($x_0$ , $x_2$) ya da ($x_2$, $x_1$) aralığındadır. Bunu anlamak için şu test yapılır:

Eğer , f($x_0$).. f($x_2$) $\rangle$ 0 ise kök ($x_2$, $x_1$) aralığındadır.
Aksi halde f($x_0$).. f($x_2$) $\langle$ 0 ise kök ($x_0$ , $x_2$) aralığındadır denir.




Yukarıdaki şekilde fonksiyon ($x_0$) ve ($x_1$) noktalarından geçen 1. kiriş yatayda $x_2$ noktasını keser ve bu nokta bizim başlangıç değerimiz olur. Bu noktaya karşılık gelen f($x_2$) değeri bulunarak yeni bir kiriş yani 2. kiriş çizilir. Bu işlem ardışık olarak sürdürüldüğünde fonksiyonun yatay ekseni kestiği noktaya yaklaşıldığı görülür. Şekildeki 1. kirişin denklemi aşağıdaki eşitlik şeklinde yazılabilir.

$y - y_0 = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.(x - x_0)$ 1. kirişin x eksenini kestiği noktada y= 0 olduğu için eşitlik aşağıdaki eşitliğe dönüşür .

y = 0

$x = x_2 = x_0 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}.(y_0)$ elde edilir.

$x_2$ için f($x_2$) = $y_2$ belirlenir.Böylece ortaya çıkan yeni kirişin x eksenini kestiği nokta araştırılır. Benzer adımlar sürdürüldüğünde:

$$x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}, ...$$

dizisi elde edilir. Bu işlemler esnasında kök değerine ulaşılıp ulaşılmadığı

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$
$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon, \quad x_n \neq 0 \qquad (*)$$
$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

kriterlerinden birisi seçilerek istenilen hassasiyet değerine göre anlaşılır.

**Örnek Algoritma:**

Repeat

Set $x_2 = x_0 - f(x_0) \times (x_0 - x_1) / [f(x_0) - f(x_1)]$.

If $f(x_2)$ of opposite sign to $f(x_0)$ :

Set $x_1 = x_2$.

Else Set $x_0 = x_2$.

Endif.

Until $(*)$.

ÖRNEK : f(x) = xsin(x) -1 = 0 ‘ı [0,2] aralığında regula falsi ile çözelim :

| k | $x_0$ | $x_2$ | $x_1$ | f( $x_2$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,09975017 | 2 | -0,02001921 |
| 1 | 1,09975017 | 1,12124074 | 2 | 0,00983461 |
| 2 | 1,09975017 | 1,1141612 | 1,12124074 | 0,00000563 |
| 3 | 1,09975017 | 1,1415714 | 1,1141612 | 0 |