Yakınsaklık Mertebesi

İterasyon kullanılan yöntemler sonucunda sonsuz dizilerle karşılaşırız. Bu dizilerin yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki tanımlardan faydalanacağız.

Tanım: Farz edelim ki $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ sıfıra yakınsadığı bilinen ve $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise bir α sayısına yakınsayan diziler olsunlar. Eğer yeteri kadar büyük n sayıları için,

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$$

olacak şekilde bir pozitif K sayısı mevcut ise, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi α sayısına $O(\beta_n)$ yakınsaklık mertebesiyle yakınsıyor denir ve bu,

$$\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım içerisinde $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ herhangi bir dizi gibi alınsa da bu dizi genellikle,

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \quad , \quad p > 0$$

şeklindedir.

Örnek: $n \geq 1$ için aşağıdaki dizileri ele alalım.

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \quad , \qquad \gamma_n = \frac{n+3}{n^3}$$

her iki dizi de sıfıra yakınsıyor. Şimdi yakınsama hızlarını bulmaya çalışalım.

$$|\alpha_n - 0| = \left|\frac{n+1}{n^2}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left|\frac{1}{n}\right| \leq 2\left|\frac{1}{n}\right| = 2|\beta_n|$$

ve

$$|\gamma_n - 0| = \left|\frac{n+3}{n^3}\right| = \left(1 + \frac{3}{n}\right)\left|\frac{1}{n^2}\right| \leq 4\left|\frac{1}{n^2}\right| = 4|\beta_n|$$

olduğundan

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \gamma_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılır. Yani, $\{\alpha_n\}$ dizisi $O\left(\frac{1}{n}\right)$ mertebesiyle $\{\gamma_n\}$ dizisi ise $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ mertebesiyle yakınsıyor.

Şimdi diziler için yaptığımız yakınsaklık mertebesi tanımını bu kez fonksiyonlar için yapalım.

Tanım: Farz edelim ki,

$$\lim_{h\to 0} G(h) = 0 \quad , \qquad \lim_{h\to 0} F(h) = L$$

olsun. Eğer yeteri kadar küçük *h* değerleri için,

$$|F(h) - L| \leq K|G(h)|$$

Olacak şekilde pozitif bir K sayısı mevcut ise,

$$F(h) = L + O(G(h))$$

yazılır.

Burada $G(h)$ genellikle,

$$G(h) = h^p \quad , \quad p > 0$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Örnek: $\cos(h)$ fonksiyonu için $h = 0$ civarındaki 3. mertebeden Taylor polinomunu kullanarak

$$\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

olduğunu gösterin.

3. Mertebe Taylor polinomu,

$$\cos(h) = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{24}h^4\cos(\xi) \,, \qquad (\,\xi \text{ sıfır ile } h \text{ arasındadır })$$

olduğundan

$$\left|\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 - 1\right| = \frac{1}{24}h^4|\cos(\xi)| \leq \frac{1}{24}h^4$$

yani tanım kullanılarak,

$$\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

gösterilmiş olur.

Nonlineer Denklemler

Bu bölümde $f(x) = 0$ şeklindeki denklemlerin sıfırlarını çeşitli yöntemler (bisection, sabit-nokta yaklaşımı, newton, kiriş yöntemi,…gibi) kullanarak bulmaya çalışacağız.

Bisection(Aralık Yarılama Yöntemi): Bu yöntem Matematik Analizden bildiğimiz Ara Değer Teoremine dayanmaktadır. Yani, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)*f(b)<0$ ise, öyle bir $a<p<b$ sayısı vardır ki $f(p)=0$ dır.

Bu yöntemde birinci iterasyon sonunda, $a=a_1$, $b=b_1$ alarak

$$p_1=\frac{a_1+b_1}{2}$$

eğer $f(p_1)=0$ ise kök p_1'dir. Değilse, $f(a_1)*f(p_1)<0$ ya da $f(b_1)*f(p_1)<0$ dır.

$$f(a_1)*f(p_1)<0 \quad ise \quad p_2=\frac{a_1+p_1}{2} \quad ve \quad a_2=a_1\,,\; b_2=p_1$$

ya da

$$f(b_1)*f(p_1)<0 \quad ise \quad p_2=\frac{b_1+p_1}{2} \quad ve \quad a_2=p_1\,,\; b_2=b_1$$

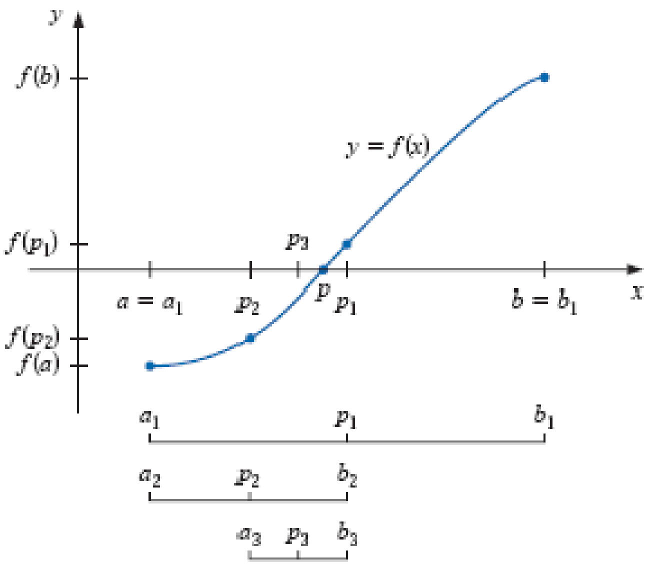
alınır. Eğer $f(p_2)=0$ ise kök p_2'dir. Değilse, $f(a_2)*f(p_2)<0$ ya da $f(b_2)*f(p_2)<0$ dır. Bu durumda,

$$f(a_2)*f(p_2)<0 \quad ise \quad p_3=\frac{a_2+p_2}{2} \quad ve \quad a_3=a_2\,,\; b_3=p_2$$

ya da

$$f(b_2)*f(p_2)<0 \quad ise \quad p_3=\frac{b_2+p_2}{2} \quad ve \quad a_3=p_2\,,\; b_3=b_2$$

alınır. İterasyon bu şekilde devam ederek bir $\{p_n\}$ dizisi oluşur. Oluşan bu dizi $f(p)=0$ olan p sayısına yakınsar. Şekil olarak gösterecek olursak:



olarak yöntem devam ettirilir. Bu yöntemi bilgisayarda döngüsel olarak şu şekilde yazabiliriz:

INPUT endpoints a, b; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;
$FA = f(a)$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = a + (b - a)/2$; (*Compute p_i.*)
$FP = f(p)$.

Step 4 If $FP = 0$ or $(b - a)/2 < TOL$ then
OUTPUT (p); (*Procedure completed successfully.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 If $FA \cdot FP > 0$ then set $a = p$; (*Compute a_i, b_i.*)
$FA = FP$
else set $b = p$. (*FA is unchanged.*)

Step 7 OUTPUT ('Method failed after N_0 iterations, N_0 =', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

Bu döngüde durdurma kriteri olarak $|b_N - a_N| < TOL$, $N \leq N_0$ seçilmiştir. Burada *N* döngü sayısını ve Tolerans değeri de bizim seçeceğimiz sıfıra yakın bir $\varepsilon > 0$ sayısını ifade eder. Bu kriterden farklı olarak aşağıdaki kriterler de döngüyü durdurmak için seçilebilir. Oluşan $\{p_n\}$ dizisi için,

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon \ , \ p_N \neq 0$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon$$

birisi tercih edilebilir.

Teorem: Farz edelim ki, $f \in C[a,b]$ ve $f(a) * f(b) < 0$ olsun. Bu durumda Bisection yöntemi f 'in sıfırı olan p sayısına yakınsayan bir $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi oluşturur, öyle ki $n \geq 1$ için,

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

dir.

İspat: Herbir $n \geq 1$ için, $p \in (a_n, b_n)$ ve

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \ \text{ ve } \ p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

olduğundan

$$|p_n - p| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = (b-a)\frac{1}{2^n}$$

yani $\{p_n\}$ dizisi p sayısına $O(1/2^n)$ mertebesiyle yakınsar ve

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

olarak gösterilir.

Örnek : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ aralığındaki köküne Bisection yöntemiyle yaklaşınız.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

Tablodan görüldüğü gibi $f(p_9) < f(p_{13})$ tür. Yani 9 iterasyon sonra elde edilen değer p_9 , 13 iterasyon sonunda elde edilen değerden p_{13} daha doğrudur. Yani, bu yöntemde iterasyon sayısı arttıkça daha doğru doğru sonuçlar alacağımız garanti değildir. Bu yöntemde önemli olan durdurma kriteri ve seçilen tolerans değeridir.

Örnek: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ aralığındaki köküne Bisection yöntemiyle 10^{-2} tolerans ve bağıl hata $\left(\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon = TOL\ ,\ p_N \neq 0\right)$ kriteriyle yaklaşınız.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	*relative error*
1	1.0	2.0	1.500000000	2.37500000	0.3333333333
2	1.0	1.500000000	1.250000000	−1.796875000	0.2000000000
3	1.250000000	1.500000000	1.375000000	0.16210938	0.09090909091
4	1.250000000	1.375000000	1.312500000	−0.848388672	0.04761904762
5	1.312500000	1.375000000	1.343750000	−0.350982668	0.02325581395
6	1.343750000	1.375000000	1.359375000	−0.096408842	0.01149425287
7	1.359375000	1.375000000	1.367187500	0.03235578	0.005714285714

7. iterasyon sonunda $\frac{|p_7 - p_6|}{|p_7|} < 0.01$ sağlanmıştır ve kök $p_7 = 1.3671875$ bulunmuştur.