Ayrık Fonksiyonların Türevi

Ayrık noktalarda verilen fonksiyon değerlerinden yola çıkarak fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türevlerini yaklaşık olarak bulmaya çalışacağız. Bunu yaparken polinomsal yaklaşımı kullanacağız.

Birinci Türev için formüller:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ civarındaki taylor açılımından:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \quad (1)$$

$h > 0$ olmak üzere, $x = x_0 + h$ alırsak

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \quad (2)$$

elde ederiz. Buradan birinci türevi:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h \quad (3)$$

formülü ile buluruz. Hata terimini çıkardığımızda küçük h değerleri için

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4)$$

Birinci türev için iki noktalı ileri fark formülü elde edilmiş olur.

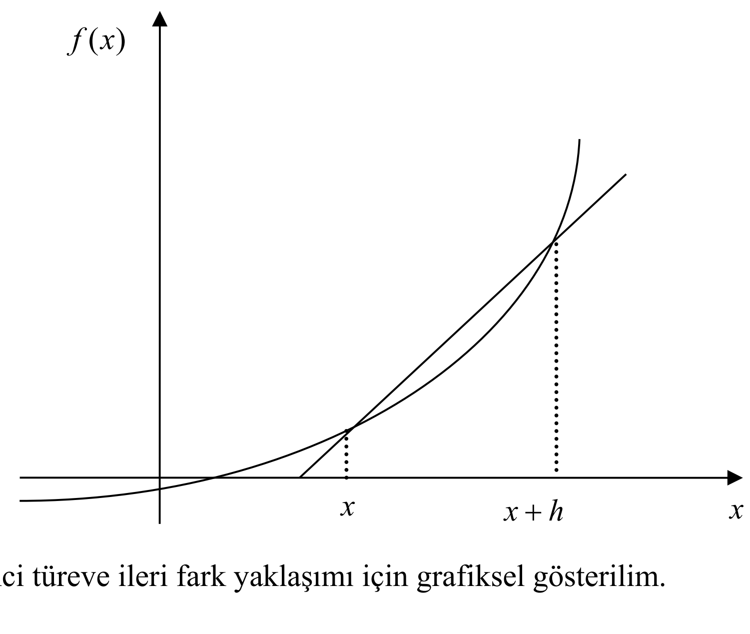

Figure 1 Birinci türeve ileri fark yaklaşımı için grafiksel gösterilim.

Formülünde bu sefer $x = x_0 - h$ alırsak

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \qquad (5)$$

elde ederiz ve

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h \qquad (6)$$

buluruz. Burada hata terimi aynı olmakla beraber birinci türev

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad (7)$$

Şeklindeki iki noktalı geri fark formülü ile ifade edilmiş olur. (3) ve (6) formüllerini topladığımızda ise,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

ve

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Iki noktalı merkezi fark formülünü elde ederiz.

Örnek

Bir roketin hızı zamana bağlı olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Table 1 Velocity as a function of time.

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

İki nokta için İleri, Geri ve Merkezi fark fromüllerini kullanarak $t = 15$ s ‘deki ivmeyi bulun.

Çözüm

İleri fark ile,

$$a(15) \approx \frac{v(20) - v(15)}{20 - 15} = \frac{517.35 - 362.78}{5} = 30.914\ m/s^2$$

Geri Fark ile,

$$a(15) \approx \frac{v(15) - v(10)}{15 - 10} = \frac{362.78 - 227.04}{5} = 27.148\ m/s^2$$

Merkezi fark ile,

$$a(15) \approx \frac{v(20) - v(10)}{(20 - 10)} = \frac{517.35 - 227.04}{10} = 29.031\ m/s^2$$

Lagrange Polinomu yardımı ile Türev

$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, ayrık noktaları ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için n‘ inci mertebeden Lagrange polinomu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad , \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

şeklindedir. Yani,

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

yazarız. f‘in türevi için her iki tarafı türettiğimizde,

$$f'(x) = P_n'(x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\right]$$

bulunur. Eğer $x = x_i$ alınırsa yukarıdaki formül ,

$$f'(x_i) = P_n'(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_i))}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)$$

biçimine indirgenmiş olur. Şimdi $(x_0, y_0), (x_1, y_1),$ ve (x_2, y_2) noktalarından geçen ikinci mertebeden Lagrange polinomunu oluşturalım ve f ‘in türevi için 3 nokta formüllerini çıkaralım.

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Yukarıdaki polinomu türettiğimizde birinci türevi,

$$P_2'(x) = \frac{2x-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{2x-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{2x-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Ve bir daha türettiğimizde ikinci türevi,

$$P_2''(x) = \frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

buluruz.

Eğer data noktaları eşit aralıklı ise, $x_0, x_1 = x_0 + h,$ ve $x_2 = x_0 + 2h \quad , h > 0$ olmak üzere, üç noktalı türev formülleri:

İleri Fark:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_1)}{3} h^2$$

Merkezi Fark:

$$f'(x_0+h) = \frac{-f(x_0) + f(x_0+2h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_2)}{6} h^2$$

veya

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_0-h) + f(x_0+h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_2)}{6} h^2$$

Geri Fark:

$$f'(x_0+2h) = \frac{f(x_0) - 4f(x_0+h) + 3f(x_0+2h)}{2h} + \frac{f'''(\xi_3)}{3} h^2$$

veya

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)}{2h} + \frac{f'''(\xi_3)}{3} h^2$$

Üç noktalı İkinci türev:

$$f''(x_0) = f''(x_0+h) = f''(x_0+2h) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)}{h^2} + \mathrm{O}(h^2)$$

Örnek

Roketin hızı zamanın fonksiyonu olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

$t = 16\,\text{s}$ için üç noktalı Lagrange polinomu yardımı ile ivmeyi bulunuz.

Çözüm

$v(t) \approx P_2(t)$ ve $a(t) \approx P_2'(t)$ olduğuna göre, $t_0 = 10, t_1 = 15, t_2 = 20$ için

$$v(t) \approx \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)v(t_0) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)v(t_1) + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)v(t_2)$$

$$a(t) \approx \frac{2t-(t_1+t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}v(t_0) + \frac{2t-(t_0+t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}v(t_1) + \frac{2t-(t_0+t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}v(t_2)$$

$$a(16) \approx \frac{2(16)-(15+20)}{(10-15)(10-20)}(227.04) + \frac{2(16)-(10+20)}{(15-10)(15-20)}(362.78) + \frac{2(16)-(10+15)}{(20-10)(20-15)}(517.35)$$

$$= -0.06(227.04) - 0.08(362.78) + 0.14(517.35)$$

$$= 29.784\,\text{m/s}^2$$