

# Sayısal İntegral

(n+1) nokta için bölünmüş farklar polinomu:

$$P_n(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{(f_2 - f_1)/(x_2 - x_1) - (f_1 - f_0)/(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)}(x - x_0)(x - x_1) + f_0^{[3]}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + f_0^{[n]}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$$f(x) = P_n(x) + Hata$$

$$\int f(x)dx = \int P_n(x) + \int Hata$$

$$Hata = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Newton-Cotes integral formülleri:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + Error$$

iki nokta Trapezoid (Yamuk) formülü:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) \right] dx = f_0 h + \frac{f_1 - f_0}{h} \left[ \frac{x_1^2}{2} - x_0 x_1 - \left( \frac{x_0^2}{2} - x_0 x_0 \right) \right] \\ &= f_0 h + (f_1 - f_0) \frac{h}{2} = (f_1 + f_0) \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$Error = \int_{x_0}^{x_1} \left[ (x - x_0)(x - x_1) \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} \right] dx = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

üç nokta Simpson 1/3 formülü:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = (f_2 + 4f_1 + f_0) \frac{h}{3} - \frac{1}{90} h^5 f^{iv}(\xi)$$

dört nokta Simpson 3/8 formülü:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = (f_3 + 3f_2 + 3f_1 + f_0) \frac{3h}{8} - \frac{3}{80} h^5 f^{iv}(\xi)$$

Global Trapezoid Formülü (eşit aralık):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b) \right]$$

$$Error = -n \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

Global Simpson 1/3 Formülü (eşit aralık):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{(n/2)} f_{2i-1} + f(b) \right]$$

$$Error = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{iv}(\xi)$$

Global Simpson's 3/8 Formülü:

$$\int_a^b f(x)dx = (f(a) + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f(b)) \frac{3h}{8}$$

$$Error = -\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{iv}(\xi)$$

Örnek:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1$$

$h = \pi/2$  için Trapezoid kuralı:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t dt \approx \frac{\pi}{4} [\sin(0) + \sin(\pi/2)] = 0.7854$$

$h = \pi/4$  için Trapezoid kuralı:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t dt \approx \frac{\pi}{8} [\sin(0) + 2 \sin(\pi/4) + \sin(\pi/2)] = 0.94806$$

$h = \pi/4$  için Simpson 1/3 kuralı:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t dt \approx \frac{\pi}{12} [\sin(0) + 4 \sin(\pi/4) + \sin(\pi/2)] = 1.0023$$

## Sorular:

1- Data değerleri verilen  $f$  fonksiyonu için aşağıdaki turevleri hesaplayınız:

a) 2. mertebeden bir polinomla  $f'(0.72) = ?$

a) 2. mertebeden bir polinomla  $f'(1.33) = ?$

a) 2. mertebeden bir polinomla  $f'(0.50) = ?$

Herbir şık için en iyi başlangıç noktasını seğiniz.

$i$	$x_i$	$f_i$
0	0.30	0.3985
1	0.50	0.6598
2	0.70	0.9147
3	0.90	1.1611
4	1.10	1.3971
5	1.30	1.6212
6	1.50	1.8325

2- Yandaki  $f(x)$  fonksiyonunu 1.0 den 1.6 ya Trapezoidal, Simpson 1/3 ve Simpson 3/8 ile entegre ediniz.

$i$	$x_i$	$f_i$
0	1.0	1.543
1	1.1	1.669
2	1.2	1.811
3	1.3	1.971
4	1.4	2.151
5	1.5	2.352
6	1.6	2.577

3- Trapezoid ve Simpson 1/3 yöntemleri ile  $\exp(x)$  fonksiyonunu  $(0,1)$  aralığında entegre ediniz. Bağıl Hatanın  $10^{-3}$  'ten küçük olması için  $h$ 'ı yeteri kadar küçültünüz. İki yöntemi mukayese ediniz.