Polinom İnterpolasyonu

(Ara Değer Bulma)

Bir fonksiyonun sonlu sayıdaki $x_0, x_1 \ldots, x_n \in \mathrm{R}$ noktalarında aldığı $f(x_0)$, $f(x_1)$,..., $f(x_n)$ değerleri bilinsin (fonksiyonun kendisi bilinmiyor). Bu noktalardan geçen *n.* dereceden bir tek,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

polinumu vardır ($i = 0,1,2\ldots,n$ için $P_n(x_i) = f(x_i)$). $P_n(x)$ polinomu elde edilip bir x noktasındaki $f(x)$ değerinin yerine $P_n(x)$ alınırsa, bilinmeyen $f(x)$ değeri yaklaşık $f(x) \approx P_n(x)$ olarak hesaplanmış olur. Bu yaklaşıma **polinom interpolasyonu** (polinom kullanarak ara değer bulma) denir.

$$\begin{array}{l} (x_0, f(x_0)) \\ (x_1, f(x_1)) \\ \ldots \\ (x_n, f(x_n)) \end{array}$$

noktalarından geçen *n.* dereceden

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

polinumunu belirlemek için

$$P_n(x_i) = f(x_i)) \quad , \quad i = 0,1,2\ldots,n$$

yani,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

denklem siteminden $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek bu katsayılar belirlenebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n^n) \end{bmatrix}$$

denklem sistemindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisi olarak bilinir ve singüler değildir. Ancak zayıf koşullu olduğunda sayısal hesaplamalardaki yuvarlatma hatalarından dolayı problemler çıkabilir. İnterpolasyon polinomunu belirlemek için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlere geçmeden önce aşağıdaki örnek üzerinde duralım.

Örnek 1: Sinüs fonksiyonu için

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & \sin(x_0) &= \sin(0) = 0 \\ x_1 &= \pi/2 & \sin(x_1) &= \sin(\pi/2) = 1 \\ x_2 &= \pi & \sin(x_2) &= \sin(\pi) = 0 \\ x_3 &= 3\pi/2 & \sin(x_3) &= \sin(3\pi/2) = -1 \\ x_4 &= 2\pi & \sin(x_4) &= \sin(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(0,0)$$
$$(\frac{\pi}{2},1)$$
$$(\pi,0)$$
$$(\frac{3\pi}{2},-1)$$
$$(2\pi,0)$$

noktalarından geçen 4. dereceden

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

polinumunu bulmaya çalışalım.

x_i	$f(x_i)$
0	0
1.5708	1
3.1416	0
4.7124	-1
6.2832	0

olduğundan A katsayılar matrisi

A =

1	0	0	0	0
1	1.5708	2.4674	3.8758	6.0881
1	3.1416	9.8696	31.006	97.409
1	4.7124	22.207	104.65	493.13
1	6.2832	39.478	248.05	1558.5

dır. $a = [a_0 \ \ a_1 \ \ a_2 \ \ a_3 \ \ a_4]^T$ katsayıları ise $f(x_i) = [0 \ \ 1 \ \ 0 \ -1 \ \ 0]^T$ olmak üzere

$a = A^{-1} * f(x_i)$ formülü ile aşağıdaki gibi bulunur.

a =

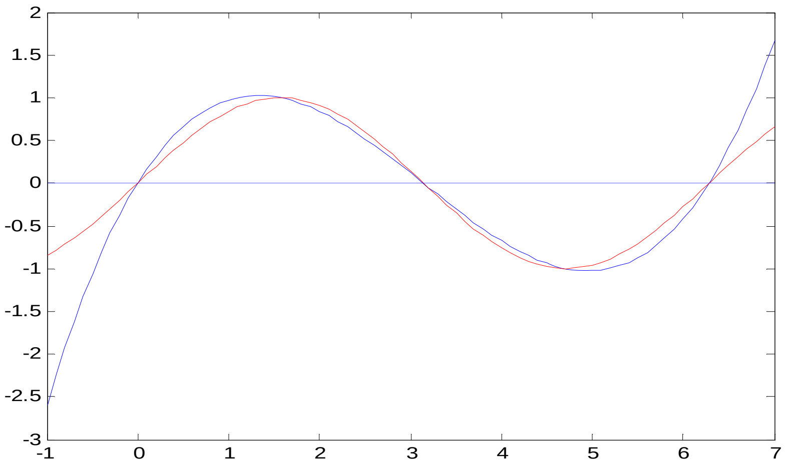
0

1.6977

-0.81057

0.086004

-1.0408e-017



$x \in [0, 2\pi]$ için $\sin(x)$ değerlerinin hesaplanmasında,

$$P_4(x) = 1.6977*x - 0.81057*x^2 + 0.086004*x^3 - 1.0408*10^{-17}*x^4$$

polinomu kullanılırsa interpolasyonda yapılan hatalar grafikteki gibi olur. Grafikte kırmızı çizgi $\sin(x)$, mavi çizgi $P_4(x)$ değerlerini göstermektedir.

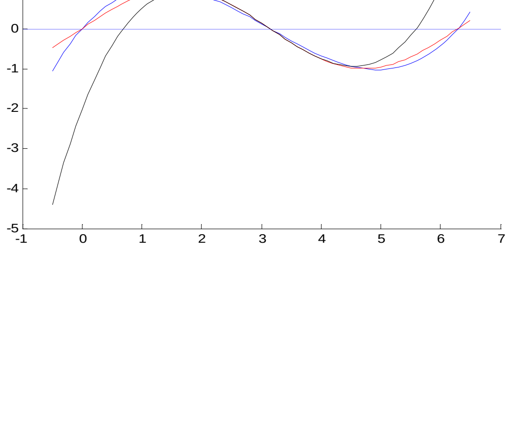
Önceki derslerden hatırladığımız gibi, sinüs fonksiyonunun değerlerini hesaplamak için Taylor açılımından faydalanılabilir. Uygun bir x_0 noktası seçip, bu nokta komşuluğunda geçerli olmak üzere Taylor serisindeki birkaç terimin oluşturduğu polinom sinüs fonksiyonu yerine kullanılabilir. Sinüs fonksiyonunu $x_0 = \pi$ noktası komşuluğunda seriye açalım.

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 - \frac{1}{720}(x-\pi)^7 - \ldots$$

olmak üzere,

$$p_3(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3$$

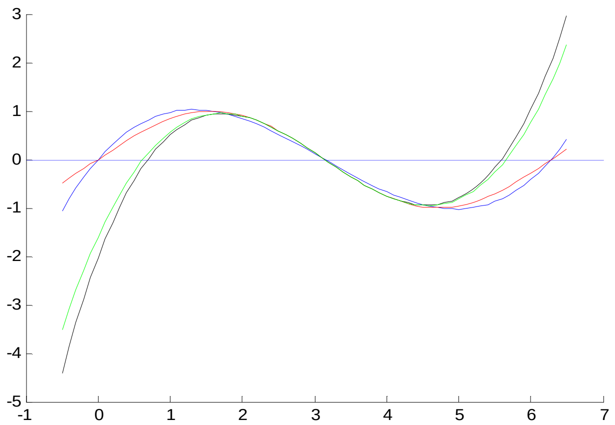
fonksiyonunu sinüs fonksiyonu yerine kullanalım. Aşağıdaki grafikte, siyah çizgi $p_3(x)$, kırmızı çizgi sinüs fonksiyonuna ve mavi çizgi yukarıdaki $P_4(x)$ polinomuna aittir.



Taylor açılımındaki,

$$p_5(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5$$

kısmı sinüs fonksiyonu yerine kullanırsak yaklaşım biraz daha daha iyi olacaktır (aşağıdaki grafikte yeşil çizgi).



Birinci Dereceden Polinom İnterpolasyonu (Doğrusal İnterpolasyon)

Bir fonksiyonun $x_0, x_1 \in R$ noktalarındaki $f(x_0)$, $f(x_1)$ değerleri bilinsin (ya da kolay hesaplanabilsin). $x_0 < x < x_1$ olmak üzere, x bir ara değer olsun ve $f(x)$ bilinmesin (kolay hesaplanamasın). $f(x)$ değerini birinci derecen polinom interpolasyonu ile hesaplamaya çalışalım.

$(x_0, f(x_0))$
$(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen doğru denklemi,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ , \qquad m = \text{eğim} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olmak üzere, birinci dereceden interpolasyon polinomu

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

olacaktır. Bu interpolasyon polinomu,

$$\boxed{P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1)}$$

biçiminde yazılsın. Dikkat edilirse $P_1(x)$ polinonomu

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{x_1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_1} x$$

ve

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_0}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_0} x$$

Polinomları cinsinden,

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1)$$

olarak yazılabilir. $L_0(x), L_1(x)$ polinomları için

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$$

$$L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$$

dır.

n. Dereceden Polinom İnterpolasyonu

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ için fonksiyon değerleri $f(x_0)$, $f(x_1)$,..., $f(x_n)$ olsun.

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

noktalarından geçen n. dereceden bir $P_n(x)$ polinomu bulunmak isteniyor. $P_n(x)$ polinomu, herbiri *n*. dereceden bir polinom olan $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ polinomları cinsinden,

$$P_n(x) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x)\cdot f(x_1) + \ldots + L_n(x)\cdot f(x_n)$$

olarak yazılsın. $P_n(x)$ polinomunun,

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

noktalarından geçmesi için,

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_2(x_0) = 0, \ldots, L_n(x_0) = 0$$

$$P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, \ldots, L_n(x_1) = 0$$

$$P_n(x_2) = f(x_2) \Rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 1, L_3(x_2) = 0, \ldots, L_n(x_2) = 0$$

...

$$P_n(x_n) = f(x_n) \Rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 0, \ldots, L_{n-1}(x_2) = 0, L_n(x_2) = 1$$

yani,

$$L_j(x_i)\begin{cases} 1 & , \quad \text{i=j} \\ 0 & , \quad \text{i} \neq \text{j} \end{cases}$$

olmalıdır. Buna göre, $\mathrm{L}_0(x) = ?$, $\mathrm{L}_1(x) = ?, \ldots, \mathrm{L}_\mathrm{n}(x) = ?$

$\mathrm{L}_0(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Kendi kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cinsinden $\mathrm{L}_0(x)$ polinumu,

$$L_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_0(x_0) = 1$ olması gerektiğinden,

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

olmalı ve

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

dır.

$\mathrm{L}_1(x)$ polinumu, kendi kökleri $x_0, x_2, \ldots, x_n$ cinsinden

$$L_1(x) = c_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $L_1(x_1)=1$ olması gerektiğinden,

$$c_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

olmalı ve

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

dır.

Benzer düşüncelerle, $L_i(x)$ polinomları

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$$

olmak üzere, n. dereceden interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right) f(x_i)$$

elde edilir. Bu formül **Lagrange formülü** olarak bilinir.

Örnek 2: Bir $f: R \to R$ fonksiyonunun -1,0,1,4 noktalarındaki değerleri 3,2,4,-10 'dur. Bu fonksiyona 3. dereceden polinom yaklaşımı yapınız.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	0	1	4
$f(x)$	3	2	4	-10

$$L_0(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-5)} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{-10}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-4)} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-4)}{(2)\cdot(1)\cdot(-3)} = \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(-6)}$$

$$L_3(x) = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{60}$$

olmak üzere,

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i)$$

$$= \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{-10}\times 3 + \frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{4}\times 2 + \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(-6)}\times 4 + \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{60}(-10)$$

elde edilir.

<u>Örnek 3</u>

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1	2
2	2	4

noktalarından geçen 2. dereceden polinomu bulunuz.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\ ,\ L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\ ,\ L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)}\cdot 1+\frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)}\cdot 2+\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)}\cdot 4$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$$

2.yol: $P_2(x)=c_0x^2+c_1x+c_2$

$x=0$ için $c_2=1$

$x=1$ için $c_0+c_1+c_2=1$

$x=2$ için $4c_0+2c_1+c_2=4$

$\left.\begin{array}{l} c_0+c_1=1 \\ 4c_0+2c_1=3 \end{array}\right\} c_0=\frac{1}{2}, c_1=\frac{1}{2}$ yani $P_2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ bulunur.

Buraya kadar anlattıklarımızı bir teoremle sonlandıralım.

Teorem (n. dereceden Lagrange interpolasyon polinomu): Eğer $x_0, x_1, \ldots, x_n$ birbirinden farklı n+1 nokta ve $f(x)$ bu noktalarda $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ değerlerine sahip bir fonksiyon ise,

$$f(x_i)=P(x_i) \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$$

koşulunu sağlayan derecesi en fazla n olan tek bir $P(x)$ polinomu vardır. Ve bu polinom:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) \qquad , \qquad L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\Big)f(x_i)$$

şeklindeki **Lagrange** İnterpolasyon polinomudur.